

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Директор физтех-школы**  
**аэрокосмических технологий**  
**С.С. Негодяев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Инерциальная навигация
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Космические технологии
	Физтех-школа Аэрокосмических Технологий
	кафедра аэрофизической механики и управления движением
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 45 час.

семинары: 45 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: В.Ф. Чуб, ассистент

Программа обсуждена на заседании кафедре аэрофизической механики и управления движением 06.04.2020

## Аннотация

Изучение учебной дисциплины направлено на углубление и расширение базовой профессиональной подготовки магистранта, формирование соответствующих компетенций.

В учебной дисциплине рассматриваются основные теоретические понятия, концепции и подходы инерциальной навигации. Студенты знакомятся с используемыми в теории инерциальной навигации математическими методами, учатся ставить задачи инерциальной навигации, выводить уравнения инерциальной навигации, получать точные решения уравнений и применять часто используемые формулы.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по основам инерциальной навигации (включая знакомство с используемыми в теории инерциальной навигации математическими методами, постановкой задачи инерциальной навигации, выводом уравнений инерциальной навигации, точными решениями уравнений и часто используемыми формулами) для использования в области разработки и эксплуатации систем управления движением и навигации космических аппаратов.

#### Задачи дисциплины

- дать студентам базовые знания в области физико-математических основ инерциальной навигации;
- показать на примерах многообразие задач, связанных с инерциальной навигацией как разделом механики.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

**3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)**

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- используемую в инерциальной навигации терминологию;
- физический смысл измеряемых инерциальными датчиками величин;
- возможности различных алгебраических, тригонометрических и экспоненциальных представлений используемых в инерциальной навигации гиперкомплексных чисел;
- кватернионные и бикватернионные представления элементарных пространственно-временных преобразований;
- группы пространственно-временной симметрии, используемые при теоретико-групповой постановке задачи инерциальной навигации;
- часто используемые формулы, связанные с инерциальной навигацией.

уметь:

- видеть в задачах, связанных с инерциальной навигацией, физическое содержание;
- выделять вещественные и мнимые, скалярные и векторные, главные и дуальные части (би)кватернионов;
- осваивать новые теоретические подходы в инерциальной навигации;
- делать правильные выводы из сопоставления результатов теории и эксперимента.

владеть:

- культурой математической постановки задач, связанных с инерциальной навигацией;
- базовыми навыками работы с кватернионами и их обобщениями;
- теоретико-групповыми методами вывода уравнений инерциальной навигации;
- навыками самостоятельной работы с научной литературой по инерциальной навигации.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий****4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий**

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Кватернионы и бикватернионы	6	6		6
2	Группы преобразований, гиперкомплексные представления групп	6	6		6
3	Постановка задачи инерциальной навигации	6	6		6
4	Вывод уравнений инерциальной навигации	6	6		6
5	Точные решения уравнений инерциальной навигации	6	6		7
6	Теоретико-групповая формулировка задачи n тел	6	6		7
7	Часто используемые формулы	9	9		7
Итого часов		45	45		45
Подготовка к экзамену		0 час.			

Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.
--------------------	---------------------

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

##### 1. Кватернионы и бикватернионы

Гиперкомплексные числа, исключительные алгебры. Комплексные, дуальные и двойные числа. Кватернионы. Дуальные кватернионы (бикватернионы Клиффорда). Комплексные кватернионы (бикватернионы Гамильтона). Комплексно-дуальные кватернионы.

##### 2. Группы преобразований, гиперкомплексные представления групп

Теория групп, эрлангенская программа Клейна. Кватернионное представление группы вращений твёрдого тела. Бикватернионное представление группы перемещений твёрдого тела. Бикватернионное представление группы Лоренца. Различие кватернионной группы и группы Пуанкаре.

##### 3. Постановка задачи инерциальной навигации

Методы навигации, навигационная бионика. Инерциальные датчики (часы; датчики угловой скорости; акселерометры). Гравитационное поле. Начальное положение (вектор состояния). Каноническая формулировка задачи инерциальной навигации.

Символическое уравнение инерциальной навигации. Часы как инерциальная навигационная система. Задача инерциальной ориентации. Инерциальная навигация без учёта гравитации. Нерелятивистская инерциальная навигация. Релятивистская инерциальная навигация.

##### 4. Вывод уравнений инерциальной навигации

Вывод для группы Галилея. Вывод для группы Пуанкаре. Вывод для кватернионной группы. Вывод для расширенной группы Галилея. Вывод для расширенной группы Пуанкаре (конформной группы).

##### 5. Точные решения уравнений инерциальной навигации

Равноускоренное движение. Движение с орбитальной ориентацией. Движение инерциальной платформы. Движение неповорачивающейся платформы. Движение гиросtabilизированной платформы. Уникальный космический эксперимент Gravity Probe-B.

##### 6. Теоретико-групповая формулировка задачи n тел

Задача n тел и её частные случаи: задача двух тел и задача одного тела. Задача одного тела – частный случай задачи инерциальной навигации. Формулировка задачи n тел в параметрах расширенной группы Галилея.

##### 7. Часто используемые формулы

Кватернионная формула перепроектирования векторов. Кватернионные формулы сложения поворотов, эйлеров поворот. Бикватернионные формулы сложения перемещений, винтовое движение. Связь компонент кватерниона и матрицы поворота. Кинематические уравнения для радиус-вектора. Кинематические уравнения для вектора скорости. Кинематические уравнения для кватерниона поворота.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимая для занятий шумоизолированная аудитория должна быть оборудована большой доской (с запасом мела и тряпок), защищённой от попадания прямого солнечного света.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация [Текст]/Н. Т. Кузовков, О. С. Салычев, -М., Машиностроение, 1982
2. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем [Текст]/В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский, -М., Наука, 1992
3. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела [Текст]/В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский, -М., Наука, 1973
4. Основы теоретической механики [Текст] : учебник для вузов / В. Ф. Журавлев ; Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) . — 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 2008, 2009 . — 304 с.
5. Лекции по теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем управления [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. Н. Бранец ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) . — М. : МФТИ, 2009 . — 304 с.
1. Бежко А.П., Бранец В.Н., Захаров Ю.М., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в теории конечного поворота твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 1. С. 123–134.
2. Визгин В.П. «Эрлангенская программа» и физика. М.: Наука, 1975.
3. Ткачев Л.И. Системы инерциальной ориентировки. Ч. 1. Основные положения теории. М.: МЭИ, 1973.
4. Чуб В.Ф. Основы инерциальной навигации. М.: URSS, 2014.

### Дополнительная литература

1. Механика. Идеи, задачи, приложения [Текст]/А. Ю. Ишлинский , -М., Наука, 1985
2. Гиперкомплексные числа [Текст]/И. Л. Кантор, А. С. Солодовников, -М., Наука, 1973
3. Навигационная бионика [Текст]/В. П. Селезнев, Н. В. Селезнева, -М, Машиностроение, 1987
4. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения [Текст]/Ю. Н. Челноков, -М., Физматлит, 2006
1. Кирпичников С.Н., Новоселов В.С. Математические аспекты кинематики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.
2. Чуб В.Ф. О возможности применения одной системы гиперкомплексных чисел в инерциальной навигации // Изв. АН. МТТ. 2002. № 6. С. 3–23.
3. Чуб В.Ф. О равноускоренном движении // Физическое образование в вузах. 2005. Т. 11. № 3. С. 127–130.
4. Чуб В.Ф. Незамкнутость элементарных преобразований пространства-времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 2 (4). С. 153–160.
5. Чуб В.Ф. Применение конформной группы в теории инерциальной навигации // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 5. С. 3–17.
6. Чуб В.Ф. Постановка задачи инерциальной навигации (теоретико-групповой подход) // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 2. С. 189–192.
7. Чуб В.Ф. Уравнения инерциальной навигации и кватернионная теория пространства-времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. Т. 4. № 1 (7). С. 133–140.
8. Чуб В.Ф. Формулировка задачи двух тел в параметрах расширенной группы Галилея // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 4. С. 16–20.
9. Чуб В.Ф. Точные решения уравнений инерциальной навигации, связанные с прецессией Томаса // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 2. С. 3–18.
10. Чуб В.Ф. Точные решения уравнений инерциальной навигации, связанные с геодезической прецессией // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 3. С. 3–22.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://urss.ru> — сайт научного издательства (издательской группы) URSS.
2. <http://mtt.ipmnet.ru> — сайт журнала «Известия РАН. Механика твердого тела».
3. <http://pinhe.lebedev.ru> — сайт журнала «Физическое образование в вузах».

4. <http://www.polynumbers.ru> – сайт журнала «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике».
5. <http://conf56.mipt.ru> – сайт 56-ой научной конференции МФТИ.
6. [http://www.space\\_lab.ru](http://www.space_lab.ru) – сайт научных конференций «Physical Interpretations of Relativity Theory».
7. <http://acanud.ru> – сайт международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Пакеты офисного программного обеспечения Microsoft Office (Word, Excel, PowerPoint), OpenOffice.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение спецкурса «Семинар по управлению движением и навигации космических аппаратов» требует систематических занятий и самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- изучение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам и литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к тестам и опросам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в результате опросов по рассмотренным темам.

Критерием качества владения материалом служит умение отвечать на вопросы по теме курса.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Космические технологии  
Физтех-школа Аэрокосмических Технологий  
кафедра аэрофизической механики и управления движением  
**курс:** 2  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** В.Ф. Чуб, ассистент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Инерциальная навигация» обучающийся должен:

### знать:

- используемую в инерциальной навигации терминологию;
- физический смысл измеряемых инерциальными датчиками величин;
- возможности различных алгебраических, тригонометрических и экспоненциальных представлений используемых в инерциальной навигации гиперкомплексных чисел;
- кватернионные и бикватернионные представления элементарных пространственно-временных преобразований;
- группы пространственно-временной симметрии, используемые при теоретико-групповой постановке задачи инерциальной навигации;
- часто используемые формулы, связанные с инерциальной навигацией.

### уметь:

- видеть в задачах, связанных с инерциальной навигацией, физическое содержание;
- выделять вещественные и мнимые, скалярные и векторные, главные и дуальные части (би)кватернионов;
- осваивать новые теоретические подходы в инерциальной навигации;
- делать правильные выводы из сопоставления результатов теории и эксперимента.

### владеть:



- культурой математической постановки задач, связанных с инерциальной навигацией;
- базовыми навыками работы с кватернионами и их обобщениями;
- теоретико-групповыми методами вывода уравнений инерциальной навигации;
- навыками самостоятельной работы с научной литературой по инерциальной навигации.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется в форме устного опроса на занятиях.

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Кватернионы. Кватернионная формула перепроектирования векторов при смене базиса. Формула перепроектирования кватернионов поворота.
2. Дуальные кватернионы (бикватернионы Клиффорда). Формула перепроектирования бикватернионов перемещения. Винтовое движение.
3. Кватернионное представление группы вращений твёрдого тела. Формулы композиции поворотов. Некоммутативность пространственных поворотов.
4. Бикватернионное представление перемещений твёрдого тела. Формулы композиции перемещений. Некоммутативность переноса и поворота.
5. Угловая скорость. Кажущееся ускорение. Каноническая формулировка задачи инерциальной навигации.
6. Символическое теоретико-групповое уравнение инерциальной навигации. Дополнительные условия для бесконечно малого преобразования.
7. Параметры, измеряемые инерциальными датчиками: часами, ДУСами, акселерометрами. Часы как инерциальная навигационная система.
8. Задача инерциальной ориентации (теоретико-групповая постановка). Кинематические уравнения для кватерниона поворота.
9. Инерциальная навигация без учёта гравитации: теоретико-групповая постановка задачи и система уравнений.
10. Теоретико-групповая постановка задачи инерциальной навигации (с учётом гравитации). Относительность гравитационного ускорения.
11. Группа Галилея. Определяющие соотношения и схема вывода уравнений инерциальной навигации для группы Галилея.
12. Необходимость расширения группы Галилея. Схема вывода уравнений инерциальной навигации для расширенной группы Галилея.
13. Движение спутника по круговой орбите. Точные решения уравнений инерциальной навигации для случая орбитальной ориентации.
14. Движение тела по окружности (без учёта гравитации). Точные решения уравнений инерциальной навигации для случая инерциальной ориентации.
15. Классическая постановка задачи  $n$  тел. Задача одного тела – частный случай задачи инерциальной навигации.
16. Формулировка задачи  $n$  тел в параметрах расширенной группы Галилея. Кинематические уравнения для радиус-вектора и вектора скорости.

Примеры билетов:

№1

1. Кватернионное представление группы вращений твёрдого тела. Формулы композиции поворотов. Некоммутативность пространственных поворотов.
2. Движение спутника по круговой орбите. Точные решения уравнений инерциальной навигации для случая орбитальной ориентации.

№ 2

1. Бикватернионное представление перемещений твёрдого тела. Формулы композиции перемещений. Некоммутативность переноса и поворота.

2. Движение тела по окружности (без учёта гравитации). Точные решения уравнений инерциальной навигации для случая инерциальной ориентации.

#### Критерии оценивания

Студенту предлагается ответить на 2 вопроса, за каждый из которых выставляется от 0 до 5 баллов.

За ответ на каждый вопрос студент получает

- 5 баллов: ставится за полный, правильный и четкий ответ на вопрос
- 4 балла: ставится за полный и правильный ответ на вопрос. Допускаются отдельные нечёткости формулировок, опечатки в выписанных формулах, подсказки экзаменатора о необходимости поправить или дополнить ответ
- 3 балла: ставится за ответ на вопрос, содержащий ошибки или пропуски, но не содержащий грубых ошибок и существенных пропусков
- 2 балла: ставится за ответ на вопрос, содержащий грубую ошибку при ответе или при отсутствии ответа на одну из составляющих вопроса
- 1 балл: ставится за ответ на вопрос, содержащий грубые ошибки или пропуски при наличии в целом приемлемого ответа на хотя бы одну из составляющих вопроса
- 0 баллов: ставится за ошибочные или отсутствующие ответы на все составляющие вопроса

Итоговая оценка вычисляется как сумма баллов по каждому вопросу. Студенты, систематически посещавшие семинары и добросовестно выполнявшие задания, имеют преимущество в виде дополнительных 1-3 баллов к набранной сумме.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Ознакомление студентов с перечнем выносимых на зачёт вопросов проводится за неделю до предзачётной консультации.

Порядок проведения дифференцированного зачёта:

Дифференцированный зачёт проводится в форме опроса. Студенту предоставляется четыре-пять минут для монолога у доски с мелом в руках, после чего экзаменатор делает при необходимости комментарии, оценивает ответ. Затем другой студент отвечает на свой первый вопрос. По завершении первого круга студенты в том же порядке отвечают на вторые вопросы. При ответе обучающегося на вопрос он не может пользоваться конспектами лекций и литературой.

Приём дифференцированного зачёта проводится в два этапа (за два занятия). После первого этапа озвучиваются оценки, полученные слушателями по результатам ответов на два-три вопроса по спецкурсу. Желающим повысить оценку предлагается дополнительно подготовиться и быть готовым к ответу на четыре-шесть вопросов.